الحل المفصّل للتمرين الأول

العلوم التجريبية ـ الرياضيات ـ الموضوع الأول (04 نقاط)

معطيات التجربة: يحتوي الصندوق U_1 على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء وكريتين خضراوين. نسحب كرية أولى من U_1؛ فإذا كانت حمراء نعيدها إليه ونسحب منه كريتين معًا، وإذا كانت خضراء نضيفها إلى U_2 ونسحب منه كريتين معًا.

نرمز بـR إلى اللون الأحمر، وبـV إلى اللون الأخضر. ويمثّل RV الحصول على كرية من كل لون، دون اعتبار للترتيب.

1. إكمال شجرة الاحتمالات

تذكير: استعمال التوافيق

عند اختيار r عناصر من بين n عناصر دون اعتبار للترتيب، يكون عدد الاختيارات:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \qquad (n! = n(n-1)\cdots 2\times 1).$$

مثلًا، عدد طرق سحب كريتين من بين ست كريات هو:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15.$$

أ. السحب الأول من الصندوق الأول

بما أنّ U_1 يحتوي على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء من أصل خمس، فإنّ:

$$\boxed{P(R) = \frac{2}{5}}, \qquad \boxed{P(V) = \frac{3}{5}}.$$

ب. إذا كانت الكرية الأولى حمراء R

نعيد الكرية إلى U_1، فيبقى فيه كريتان حمراوان وثلاث كريات خضراء. نسحب منه كريتين في آن واحد، وعدد الأزواج الممكنة هو $\binom{5}{2} = 10$.

$$P(RR \mid R) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10},$$

$$P(RV \mid R) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{3}{5},$$

$$P(VV \mid R) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}.$$

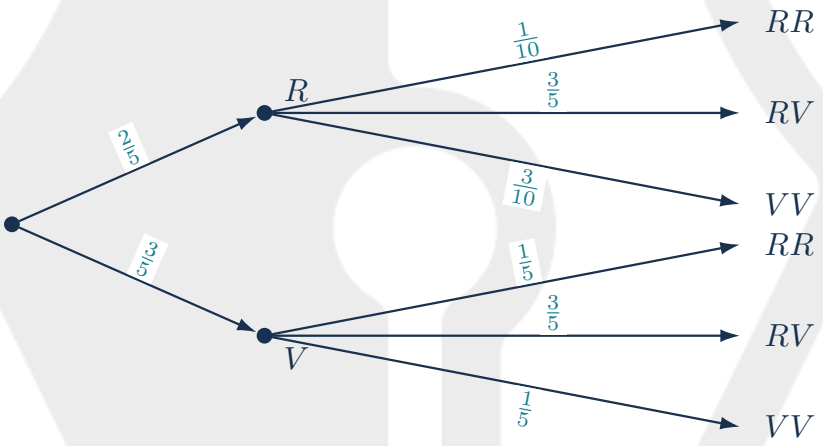
ج. إذا كانت الكرية الأولى خضراء V

نضيف الكرية الخضراء إلى U_2، فيصبح فيه ثلاث كريات حمراء وثلاث كريات خضراء؛ أي ست كريات. عدد الأزواج الممكنة هو $\binom{6}{2} = 15$.

$$P(RR \mid V) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$
$$P(RV \mid V) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$
$$P(VV \mid V) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

شجرة الاحتمالات المكتملة

الأعداد المكتوبة على الفروع تمثّل احتمالات الانتقال إلى النتائج المبيّنة، بشرط تحقق نتيجة السحب الأول.



التحقق: مجموع احتمالات الفروع الخارجة من كل عقدة يساوي واحدًا:

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = 1, \qquad \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

قاعدة لاستعمال شجرة الاحتمالات

نضرب احتمالات الفروع على المسار نفسه للحصول على احتمال ذلك المسار، ونجمع احتمالات المسارات المتنافية التي تحقق الحادثة المطلوبة.

2. حساب احتمالي الحادثتين A وB

أ. الحادثة A: الحصول على ثلاث كريات من اللون نفسه

تتحقق هذه الحادثة في حالتين متنافيتين: RRR (ثلاث حمراء)، أو VVV (ثلاث خضراء). وباستعمال قاعدة ضرب احتمالات الفروع ثم جمع الاحتمالات:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(RRR) + P(VVV) \\ &= P(R)P(RR \mid R) + P(V)P(VV \mid V) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{25} + \frac{3}{25} = \boxed{\frac{4}{25}}. \end{aligned}$$

ب. الحادثة B: الحصول على كرية خضراء على الأقل

نستعمل الحادثة المتمّمة $\overline{B}$: عدم الحصول على أي كرية خضراء، أي الحصول على ثلاث كريات حمراء RRR. ومنه:

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(RRR) \\ &= 1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{25} = \boxed{\frac{24}{25}}. \end{aligned}$$

نتيجة السؤال الثاني:

$$\boxed{P(A) = \frac{4}{25}} \qquad \boxed{P(B) = \frac{24}{25}}.$$

3. قانون احتمال المتغير العشوائي X وأمله الرياضي

يرمز X إلى **عدد الكريات الحمراء** ضمن الكريات الثلاث المسحوبة وفق التجربة. لذلك فإنّ القيم الممكنة هي:

$$\boxed{X \in \{0, 1, 2, 3\}}.$$

أ. تحديد قانون الاحتمال

الحالة $X = 0$: لا نحصل على أي كرية حمراء، أي المسار VVV:

$$P(X = 0) = P(V)P(VV \mid V) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{3}{25}}.$$

الحالة $X = 1$: نحصل على كرية حمراء واحدة. المساران الممكنان هما RVV وVRV:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(R)P(VV \mid R) + P(V)P(RV \mid V) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \boxed{\frac{12}{25}}. \end{aligned}$$

الحالة $X = 2$: نحصل على كريتين حمراوين. المساران الممكنان هما RRV وVRR:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(R)P(RV \mid R) + P(V)P(RR \mid V) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{25} + \frac{3}{25} = \boxed{\frac{9}{25}}. \end{aligned}$$

الحالة $X = 3$: نحصل على ثلاث كريات حمراء، أي المسار RRR:

$$P(X=3) = P(R)P(RR \mid R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{25}}.$$

جدول قانون الاحتمال

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$

نتحقّق من أنّ مجموع هذه الاحتمالات يساوي واحدًا:

$$\frac{3}{25} + \frac{12}{25} + \frac{9}{25} + \frac{1}{25} = \frac{25}{25} = 1.$$

ب. حساب الأمل الرياضي $E(X)$

تذكير: الأمل الرياضي لمتغير عشوائي متقطّع هو مجموع جداءات كل قيمة في احتمالها:

$$\boxed{E(X) = \sum_i x_i \, P(X = x_i)}.$$

بالتعويض بالقيم المحسوبة في الجدول نجد:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{3}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{9}{25} + 3 \times \frac{1}{25} \\ &= \frac{12 + 18 + 3}{25} = \boxed{\frac{33}{25} = 1.32}. \end{aligned}$$